$(5-BE)^2$，∴ $BE=\frac{7}{5}$，∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$.

15. (1)【证明】∵ AF 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle BAF=\angle DAF$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，即 $AB/\!/DF$，∴ $\angle BAF=\angle CFE$，$\angle DAF=\angle CEF$，∴ $\angle CEF=\angle CFE$，∴ $CE=CF$. 又∵ 四边形 $ECFG$ 是平行四边形，∴ 四边形 $ECFG$ 为菱形.

(2)①【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB/\!/DC$，$AB=DC$，$AD/\!/BC$. ∵ $\angle ABC=120°$，∴ $\angle BCD=60°$，$\angle BCF=120°$. 由(1)知，四边形 $CEGF$ 是菱形，∴ $CE=GE$，$\angle BCG=\frac{1}{2}\angle BCF=60°$，∴ $\triangle ECG$ 是等边三角形，$\angle DCG=120°$，∴ $CG=GE=CE$. ∵ $EG/\!/DF$，∴ $\angle BEG=\angle BCF=\angle DCG=120°$. ∵ AE 是 $\angle BAD$ 的平分线，∴ $\angle DAE=\angle BAE$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle DAE=\angle AEB$，∴ $\angle BAE=\angle AEB$，∴ $AB=BE$，∴ $BE=CD$，∴ $\triangle DGC\cong\triangle BGE$(SAS).

【解】② ∵ $\triangle DGC\cong\triangle BGE$，∴ $BG=DG$，$\angle BGE=\angle DGC$，∴ $\angle BGD=\angle CGE$. ∵ $\triangle CEG$ 是等边三角形，∴ $\angle CGE=60°$，∴ $\angle BGD=60°$. ∵ $BG=DG$，∴ $\triangle BDG$ 是等边三角形，∴ $\angle BDG=60°$.

(3)过 M 作 $MH\perp DF$ 于 H. ∵ $\angle ABC=90°$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形，则易知 $MH/\!/CE$. 由(1)可知四边形 $ECFG$ 为菱形，而 $\angle ECF=\angle ABC=90°$，∴ 四边形 $ECFG$ 为正方形，∴ $\angle CEF=45°$，∴ $\angle AEB=\angle CEF=45°$，∴ $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，∴ $BE=AB=8$，∴ $CE=CF=BC-BE=AD-BE=14-8=6$. ∵ $MH/\!/CE$，$EM=FM$，∴ MH 是 $\triangle ECF$ 的中位线，∴ $CH=FH=\frac{1}{2}CF=3$，$MH=\frac{1}{2}CE=3$，∴ $DH=11$，∴ $DM=\sqrt{DH^2+MH^2}=\sqrt{11^2+3^2}=\sqrt{130}$.

第七章　二次根式

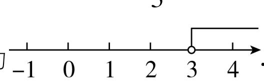
1　二次根式

刷基础

1. C 【解析】①$\sqrt[3]{8}$不是二次根式；②$\sqrt{16}$是二次根式；③$\sqrt{-3-m^2}$中$-3-m^2<0$，所以不是二次根式；④$\sqrt{|m|+1}$中$|m|+1>0$，所以是二次根式；⑤$\sqrt{x^2+2x+1}$中$x^2+2x+1\geqslant 0$，所以是二次根式. 所以其中一定是二次根式的是②④⑤. 故选 C.

归纳总结 判断一个式子是不是二次根式需要判断以下两点：一是式子是不是$\sqrt{a}$的形式，二是根号里的 a 是不是满足大于等于 0.

2. 3 【解析】当 $2x-6=0$ 时，$\sqrt{2x-6}$ 的值最小，为 0，则 $x=3$，故答案为 3.

3. B 【解析】依题意，得 $1-\frac{1}{3}x<0$，解得 $x>3$，在数轴上表示为. 故选 B.

4. D 【解析】A 选项，当 $m<0$ 时，没有意义，故该选项不符合题意；B 选项，当 $m<-1$ 时，没有意义，故该选项不符合题意；C 选项，当 $m<1$ 时，没有意义，故该选项不符合题意；D 选项，∵ $m^2\geqslant 0$，∴ $m^2+1>0$，∴ 不论 m 取何值，都有意义，故该选项符合题意. 故选 D.

关键点拨 二次根式有意义即被开方数为非负数.

5. C 【解析】∵ 二次根式$\sqrt{3x-m}$有意义，∴ $3x-m\geqslant 0$，∴ $x\geqslant\frac{m}{3}$. ∵ 当 $x\geqslant 3$ 时，二次根式$\sqrt{3x-m}$一定有意义，∴ $\frac{m}{3}\leqslant 3$，∴ $m\leqslant 9$. 故选 C.

6. 0(答案不唯一) 【解析】若式子$\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{2-a}}$在实数范围内有意义，则$\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\2-a>0,\end{cases}$解得$-1\leqslant a<2$，∴ a 可以取的一个整数为 0，故答案为 0(答案不唯一).

7.【解】(1)由题意可得$\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\x-5\neq 0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\geqslant-\frac{1}{2},\\x\neq 5,\end{cases}$即 $x\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 5$，∴ 当 $x\geqslant-\frac{1}{2}$且 $x\neq 5$ 时，$\frac{\sqrt{2x+1}}{x-5}$有意义.

(2)由 $x+2\geqslant 0$，得 $x\geqslant -2$；由 $x-3\geqslant 0$，得 $x\geqslant 3$. 综上，$x\geqslant 3$，∴ 当 $x\geqslant 3$ 时，$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$有意义.

(3)∵ $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0$，∴ 当 x 取任意实数时，$\sqrt{4x^2-4x+1}$都有意义.

8. A 【解析】∵ $(3-x)^2-5$ 与$\sqrt{y-2}+5$ 互为相反数，∴ $(3-x)^2-5+\sqrt{y-2}+5=0$，即 $(3-x)^2+\sqrt{y-2}=0$，∴ $3-x=0$，$y-2=0$，解得 $x=3$，$y=2$，

$\therefore \frac{x+3}{y-1}=\frac{3+3}{2-1}=6$. 故选 A.

刷有所得

非负数的性质:几个非负数的和为 0 时,这几个非负数都为 0.

9. $\frac{2}{3}$ 【解析】由题意可知 $\begin{cases}2x-3\geq 0,\\3-2x\geq 0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3}{2}$,则 $y=1$,所以 $x^{-y}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$. 故答案为$\frac{2}{3}$.

10. 2 026 【解析】∵ $\sqrt{a-2\,026}+|a-2\,025|=a$, ∴ $a-2\,026\geq 0$, ∴ $a\geq 2\,026$, ∴ $a-2\,025>0$, ∴ $\sqrt{a-2\,026}+a-2\,025=a$, ∴ $\sqrt{a-2\,026}=2\,025$, ∴ $a-2\,026=2\,025^2$, ∴ $a-2\,025^2=2\,026$. 故答案为 2 026.

11. D 【解析】∵ $(-\sqrt{11})^2=11$, $(\sqrt{13})^2=13$, ∴ $(-\sqrt{11})^2+(\sqrt{13})^2=11+13=24$. 故选 D.

12. B 【解析】因为 $(\sqrt{5})^2=5$,所以 $(\sqrt{5})^2$ 的算术平方根是$\sqrt{5}$. 故选 B.

13. $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ 【解析】$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. 故答案为$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

关键点拨

解题关键是逆用 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geq 0)$.

2 二次根式的性质

刷基础

1. A 【解析】A 选项,$\sqrt{2^2}=|2|=2$,符合题意;B 选项,$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$,不符合题意;C 选项,$\sqrt{2^2}=|2|=2$,不符合题意;D 选项,$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$,不符合题意. 故选 A.

2. A 【解析】由数轴上点的位置关系,得 $1>b>0>a>-1$,所以 $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}-\sqrt{(a-b)^2}=-a-b-(b-a)=-a-b-b+a=-2b$,故选 A.

3. 3 【解析】∵ $\sqrt{(a-3)^2}=3-a$, ∴ $3-a\geq 0$, ∴ $a\leq 3$, ∴ 符合条件的正整数 a 的值为 1,2,3,共 3 个.

4. C 【解析】原式$=\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,故选 C.

5. C 【解析】A 选项,应先将被开方数化为假分数,再化简,原计算错误;B 选项,原式$=\sqrt{29}$;C 选项计算正确;D 选项,原式$=4|x|\sqrt{3y}$. 故选 C.

6. $4ab^2\sqrt{b}$ 【解析】∵ $a\geq 0,b\geq 0$, ∴ $\sqrt{16a^2b^5}=\sqrt{4^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot b^2\cdot b}=4ab^2\sqrt{b}$. 故答案为 $4ab^2\sqrt{b}$.

7. 5 【解析】若$\sqrt{x(3-x)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{3-x}$,则 $x\geq 0$ 且 $3-x\geq 0$,解得 $0\leq x\leq 3$, ∴ $\sqrt{(x+1)^2}+|x-4|=|x+1|+|x-4|=x+1+4-x=5$,故答案为 5.

8. 【解】(1) 原式$=\sqrt{144\times 100}=\sqrt{144}\times\sqrt{100}=12\times 10=120$.

(2) 原式$=-\frac{1}{2}\sqrt{6^2\times 5}=-\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}=-3\sqrt{5}$.

(3) 原式$=\sqrt{3^2\times m^2\times 2n}=3|m|\sqrt{2n}=3m\sqrt{2n}$.

9. B 【解析】因为 $\sqrt{\frac{m+3}{4-m}}=\frac{\sqrt{m+3}}{\sqrt{4-m}}$ 成立,所以 $\begin{cases}m+3\geq 0,\\4-m>0,\end{cases}$ 解得$-3\leq m<4$,选项中只有 2 符合题意. 故选 B.

关键点拨

解题的关键是能根据已知条件以及所给二次根式确定 x,y 的取值范围.

10. B 【解析】∵ $xy<0$, ∴ $x>0,y<0$ 或 $x<0,y>0$. 又∵ $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 有意义, ∴ $y<0$,则 $x>0$. 当 $x>0$,$y<0$ 时,$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=x\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{-y}$,故选 B.

11. A 【解析】$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{0.2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$,故 B、C、D 选项都不是最简二次根式,不符合题意;$\sqrt{2}$是最简二次根式,故 A 符合题意. 故选 A.

12. −2 【解析】∵ 二次根式$\sqrt{2x+7}$是最简二次根式, ∴ $2x+7\geq 0$, ∴ $2x\geq -7$, ∴ $x\geq -3.5$. ∵ x 为整数, ∴ 当 $x=-3$ 时,二次根式为$\sqrt{1}=1$,不是最简二次根式,不合题意;当 $x=-2$ 时,二次根式为$\sqrt{3}$,是最简二次根式,符合题意, ∴ 若二次根式$\sqrt{2x+7}$是最简二次根式,则 x 可取的最小整数是−2. 故答案为−2.

易错警示

因为$\sqrt{1}=1$,所以$\sqrt{1}$不是最简二次根式.

刷提升

1. D 【解析】∵ $a=5$, ∴ $1-a<0$, ∴ $a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+a-1=2a-1=2\times 5-1=9$,故甲错,乙对. 故选 D.

2. A 【解析】由题可知当 $x<2$ 时,$y=2-x-x+3=5-2x$,则当 $x=1$ 时,$y=5-2\times 1=3$;当 $x\geq 2$ 时,$y=x-2-x+3=1$,则当 x 分别取 2,3,…,2 025 时,y 的值均为 1, ∴ 当 x 分别取 1,2,3,…,2 025 时,所对应的 y 值的总和是 $3+2\,024\times 1=2\,027$. 故选 A.

3. 3 75 【解析】∵ $\sqrt{\frac{300}{n}}=\sqrt{\frac{3\times 100}{n}}=10\sqrt{\frac{3}{n}}$, 且$\sqrt{\frac{300}{n}}$为整数,$n$ 为正整数, ∴ n 最小值为 3. ∵ $\sqrt{\frac{300}{n}}$是大于 1 的整数, ∴ $\sqrt{\frac{300}{n}}$的最小值为 2. ∵ $\sqrt{\frac{300}{n}}$越小,$\frac{300}{n}$越小,则 n 越大, ∴ 当$\sqrt{\frac{300}{n}}=2$ 时,$\frac{300}{n}=4$, ∴ $n=75$. 故答案为 3,75.

4.【解】∵ $\sqrt{135}=\sqrt{15}\times\sqrt{9}=3\sqrt{15}$，∴ $k=3$.

∵ $\sqrt{450}=\sqrt{225}\times\sqrt{2}=15\sqrt{2}$，∴ $m=2$.

∵ $\sqrt{180}=\sqrt{36}\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$，∴ $n=5$. ∴ $m<k<n$.

5.【解】(1) 猜想 $\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{24}}$. 故答案为 $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{24}}$.

(2) 猜想 $\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)}=\frac{1}{9}\sqrt{\frac{9}{80}}$，验证：$\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)}=\sqrt{\frac{1}{8\times9\times10}}=\sqrt{\frac{9}{8\times9^2\times10}}=\frac{1}{9}\sqrt{\frac{9}{80}}$.

(3) $\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{(n-1)(n+1)}}$ ($n\geqslant2$ 且为自然数). 验证：$\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}=\sqrt{\frac{1}{(n-1)n(n+1)}}=\sqrt{\frac{n}{(n-1)n^2(n+1)}}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{(n-1)(n+1)}}$ ($n\geqslant2$ 且为自然数).

刷素养

6.【解】(1) ∵ $11+6\sqrt{2}=3^2+2\times3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$，∴ $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$.

(2) ∵ $m+2\sqrt{m-1}=m-1+2\times\sqrt{m-1}\times1+1=(\sqrt{m-1})^2+2\times\sqrt{m-1}\times1+1^2=(\sqrt{m-1}+1)^2$，

$\sqrt{m-1}\geqslant0$，∴ $\sqrt{m-1}+1>0$，

∴ $\sqrt{m+2\sqrt{m-1}}=\sqrt{(\sqrt{m-1}+1)^2}=\sqrt{m-1}+1$.

3　二次根式的加减

刷基础

1. D　【解析】$\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式，A 不符合题意；$\sqrt{30}$ 与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式，B 不符合题意；$\sqrt{25}=5$，与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式，C 不符合题意；$\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，与 $\sqrt{5}$ 是同类二次根式，D 符合题意. 故选 D.

2. A　【解析】$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，它能与 $\sqrt{2}$ 合并，则 A 符合题意；$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，它不能与 $\sqrt{2}$ 合并，则 B 不符合题意；$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，它不能与 $\sqrt{2}$ 合并，则 C 不符合题意；$-\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$，它不能与 $\sqrt{2}$ 合并，则 D 不符合题意. 故选 A.

刷有所得　判断两个二次根式能否合并，一定要先化成最简二次根式，然后再看被开方数是否相同.

3. 2　【解析】

将二次根式化为最简	$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
可以合并，根号下数值相等	$3=m+1$
解方程，得结果	$m=2$

4.【解】(1) 由题意可知 $4a-5=13-2a$，解得 $a=3$.

(2) ∵ $a=3$，∴ $3\leqslant x\leqslant6$，∴ $x-2\geqslant1>0$，$x-6\leqslant0$.
原式 $=|x-2|+|x-6|=x-2-(x-6)=4$.

思路分析　由 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{75}$ 得出 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，进而得出答案.

5.【解】存在. 理由：∵ a,b 都是正整数，$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{b}$ 是可以合并的二次根式，$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$，$a<b$，∴ $\sqrt{a}=\sqrt{3}$，$\sqrt{b}=4\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{a}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{b}=3\sqrt{3}$，∴ $a=3$，$b=48$ 或 $a=12$，$b=27$.

6. A　【解析】原式 $=7\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$. 故选 A.

7. B　【解析】∵ 当 $m\geqslant n$ 时，$m\Phi n=2\sqrt{m}-\sqrt{n}$，∴ $3\Phi2=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$. ∵ 当 $m<n$ 时，$m\Phi n=2\sqrt{m}+\sqrt{n}$，∴ $8\Phi12=2\sqrt{8}+\sqrt{12}=4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，∴ $(3\Phi2)-(8\Phi12)=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})-(4\sqrt{2}+2\sqrt{3})=-5\sqrt{2}$. 故选 B.

思路分析　由 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$ 知点 B 在点 A 的左侧，进而可求出 AB 的长.

8. $5\sqrt{2}$　【解析】∵ 数轴上的点 A，点 B 所对应的实数分别是 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$，且 $-3\sqrt{2}<2\sqrt{2}$，∴ 点 B 在点 A 的左侧，∴ $AB=2\sqrt{2}-(-3\sqrt{2})=5\sqrt{2}$. 故答案为 $5\sqrt{2}$.

9. $9\sqrt{5}$　【解析】这个三角形的周长为 $\sqrt{20}+\sqrt{80}+\sqrt{45}=\sqrt{4\times5}+\sqrt{16\times5}+\sqrt{9\times5}=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+3\sqrt{5}=9\sqrt{5}$ (cm). 故答案为 $9\sqrt{5}$.

10.【解】(1) 原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-3\sqrt{3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

11.【解】原式 $=\frac{1}{2}a\cdot2\sqrt{a}+16a\cdot\frac{\sqrt{a}}{3}-4a^2\cdot\frac{\sqrt{a}}{a}=a\sqrt{a}+\frac{16a}{3}\sqrt{a}-4a\sqrt{a}=\frac{7a}{3}\sqrt{a}$. 当 $a=9$ 时，原式 $=\frac{7\times9}{3}\times\sqrt{9}=63$. ($a$ 的值不唯一)

4　二次根式的乘除

课时 1　二次根式的乘除

刷基础

1. D　【解析】原式 $=\sqrt{0.4\times1.6}=\sqrt{0.64}=0.8$. 故选 D.

2. A　【解析】$\sqrt{12}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2\times3=6$，是有理数，故 A 选项正确；$\sqrt{10}\times\sqrt{3}=\sqrt{30}$，是无理数，故 B 选项错误；$\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$，是无理

数，故 C 选项错误；$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，是无理数，故 D 选项错误. 故选 A.

3. 72 【解析】依题意得，长方体的体积为 $2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=72(\text{cm}^3)$. 故答案为 72.

4. $-4a^2$ 【解析】$a\sqrt{-2a}\cdot\sqrt{-8a}=a\sqrt{16a^2}=a|4a|$. ∵ $a<0$，∴ $a|4a|=a\times(-4a)=-4a^2$. 故答案为$-4a^2$.

5. 【解】(1) $\sqrt{24}\times\sqrt{6}=\sqrt{24\times6}=\sqrt{144}=12$.

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{12}=\sqrt{\frac{2}{3}\times12}=2\sqrt{2}$.

(3) $6\sqrt{30}\times\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}=\left(6\times\frac{2}{3}\right)\times\sqrt{30\times\frac{5}{2}}=4\sqrt{75}=20\sqrt{3}$.

6. C 【解析】$(\sqrt{3})^2=3$，故 A 选项计算错误，不符合题意；$\sqrt{(-2)^2}=2$，故 B 选项计算错误，不符合题意；$\sqrt{8}\div\sqrt{2}=\sqrt{8\div2}=\sqrt{4}=2$，故 C 选项计算正确，符合题意；$\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{6\div2}=\sqrt{3}$，故 D 选项计算错误，不符合题意. 故选 C.

7. A 【解析】由题意得$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\sqrt{\frac{50}{5}}}{\sqrt{\frac{25}{5}}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，故选 A.

8. B 【解析】把 $a=\sqrt{\frac{2\,021}{2\,022}}$，$b=\sqrt{\frac{2\,022}{2\,023}}$ 代入 $\frac{a}{b}$，得 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{\frac{2\,021}{2\,022}}}{\sqrt{\frac{2\,022}{2\,023}}}=\sqrt{\frac{2\,021\times2\,023}{2\,022^2}}$.

∵ $2\,021\times2\,023=(2\,022-1)\times(2\,022+1)=2\,022^2-1$，∴ $2\,021\times2\,023<2\,022^2$，∴ 原式小于 1. 故选 B.

9. $-m$ 【解析】∵ $mn>0$，$m+n<0$，∴ $m<0$，$n<0$，∴ 原式$=\sqrt{mn\div\frac{n}{m}}=\sqrt{m^2}=|m|=-m$. 故答案为$-m$.

10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】∵ $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，无理数 x 与$\sqrt{8}$的积是一个正整数，∴ x 是含有$\sqrt{2}$的无理数，且 $x>0$，∴ x 的最小值为$\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故答案为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11. 3 【解析】原式$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=(\sqrt{3})^2=3$. 故答案为 3.

12. 【解】(1) 原式$=3\times\frac{2}{3}\times\sqrt{45\div\frac{1}{5}\times\frac{8}{3}}=2\times\sqrt{100\times6}=20\sqrt{6}$.

(2) 原式$=3\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times2\sqrt{\frac{2}{3}\times15\times\frac{5}{2}}=-\frac{3}{4}\times5=-\frac{15}{4}$.

(3) 原式$=4\sqrt{\frac{a^2b}{ab}\cdot\frac{a}{b}}=4\sqrt{\frac{a^2}{b}}=\frac{4a}{b}\sqrt{b}$.

刷易错

易错警示：计算时一定要注意字母 a 的正负性，当 a 为负数时，应先留负号在根号外，然后将 a 的平方移到根号内化简.

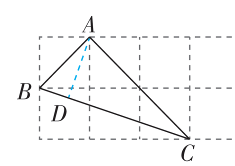
13. B 【解析】因为$-\frac{1}{a}>0$，所以 $a<0$，所以 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\times\left(-\frac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$. 故选 B.

刷提升

1. C 【解析】小明的做法是正确的，计算时用到了$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$，故 A 不符合题意，C 符合题意；小亮的做法是正确的，计算时用到了$(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant0)$，未用到$\sqrt{a^2}=a\,(a\geqslant0)$，故 B 不符合题意，D 不符合题意. 故选 C.

关键点拨：根据网格特征和勾股定理求出△ABC 的各边长，利用三角形的面积公式进行解答即可.

2. C 【解析】如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D. 由网格特征和勾股定理可得，$AB^2=1^2+1^2=2$，$AC^2=2^2+2^2=8$，$BC^2=1^2+3^2=10$，∴ $AB^2+AC^2=2+8=10=BC^2$，∴ △ABC 是直角三角形，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，即$\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{10}AD$，∴ $AD=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. 故选 C.



3. $\pm3\sqrt{6}a$ 【解析】原式$=-9\cdot\sqrt{\frac{3(m+n)(m-n)}{2a^2}\cdot\frac{4a^2}{9(m+n)}\cdot\frac{a^2}{m-n}}=-9\cdot\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=-3\sqrt{6}\cdot|a|=\pm3\sqrt{6}a$. 故答案为$\pm3\sqrt{6}a$.

4. $2\sqrt{3}$ 【解析】(5,4)表示第 5 排从左向右第 4 个数，即为$\sqrt{2}$，(15,7)表示第 15 排从左向右第 7 个数. ∵ 奇数排最中间的一个数都是 1，第 15 排是奇数排，∴ 第 15 排从左向右第 8 个数是 1，则第 7 个数是$\sqrt{6}$，∴ (5,4)与(15,7)表示的两个数之积是$\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$. 故答案为 $2\sqrt{3}$.

5. $3\sqrt{5}+3$　【解析】对角线方向上的实数相乘的结果为 $5\sqrt{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{2}=10\sqrt{10}$. 根据方格中横向、纵向及对角线方向上的实数相乘的结果都相等得, $A\times5\times\sqrt{2}=10\sqrt{10}$, 解得 $A=2\sqrt{5}$; $B\times\sqrt{10}\times10=10\sqrt{10}$, 解得 $B=1$; $5\times\sqrt{10}\times C=10\sqrt{10}$, 解得 $C=2$; $\sqrt{2}\times10\times D=10\sqrt{10}$, 解得 $D=\sqrt{5}$, ∴ A, B, C, D 之和为 $2\sqrt{5}+1+2+\sqrt{5}=3\sqrt{5}+3$, 故答案为 $3\sqrt{5}+3$.

6.【解】(1) 由题意得, 正方形 $AEFG$ 的边长为 $\sqrt{192}=8\sqrt{3}$ (cm),

∴ $AD=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (cm), $AB=8\sqrt{3}-7\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm),

∴ 长方形木板 $ABCD$ 的面积为 $6\sqrt{3}\times\sqrt{3}=18$ (cm^2).

(2) 该长方形木料的长为 $12\div\frac{\sqrt{6}}{2}=12\times\frac{2}{\sqrt{6}}=4\sqrt{6}$ (cm).

(3) ∵ $1.5<\sqrt{3}<2<6\sqrt{3}$, $\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, $5<3\sqrt{3}<6$,

$\frac{\sqrt{3}}{1.5}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $1<\frac{2}{3}\sqrt{3}<2$,

∴ 从长方形木板 $ABCD$ 中裁出长为 2 cm、宽为 1.5 cm 的长方形木条, 最多能裁出 5 根.

> **关键点拨** 根据方格中横向、纵向及对角线方向上的实数相乘的结果都相等列式是解题的关键.

课时 2　二次根式的混合运算

刷基础

1. D　【解析】$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并, 故 A 不符合题意; $3\sqrt{6}-\sqrt{6}=2\sqrt{6}$, 故 B 不符合题意; $(\sqrt{7}+\sqrt{3})\times\sqrt{10}=\sqrt{70}+\sqrt{30}$, 故 C 不符合题意; $(\sqrt{27}-\sqrt{18})\div\sqrt{3}=3-\sqrt{6}$, 故 D 符合题意. 故选 D.

2. C　【解析】$\sqrt{2}\times\sqrt{18}-\sqrt{24}\div2\sqrt{2}=\sqrt{2\times18}-\frac{1}{2}\sqrt{24\div2}=6-\sqrt{3}$. ∵ $1^2<3<2^2$, ∴ $1<\sqrt{3}<2$, ∴ $4<6-\sqrt{3}<5$, ∴ 可以近似表示 $\sqrt{2}\times\sqrt{18}-\sqrt{24}\div2\sqrt{2}$ 的运算结果的点是点 C, 故选 C.

3. $\frac{7}{3}$　【解析】原式 $=\left(3\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\div\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\div\sqrt{3}=\frac{7}{3}$. 故答案为 $\frac{7}{3}$.

4.【解】(1) 原式 $=4\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{2}\times12}+2\sqrt{6}=5\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

(2) 原式 $=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}$.

5. D　【解析】∵ x, y 都是负数, ∴ $x-2\sqrt{xy}+y=-(-x+2\sqrt{xy}-y)=-(\sqrt{-x}+\sqrt{-y})^2$. 故选 D.

6. B　【解析】$(\sqrt{3}+2)^{2\,024}(\sqrt{3}-2)^{2\,025}=[(\sqrt{3}+2)^{2\,024}(\sqrt{3}-2)^{2\,024}](\sqrt{3}-2)=[(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)]^{2\,024}(\sqrt{3}-2)=(3-4)^{2\,024}(\sqrt{3}-2)=1\times(\sqrt{3}-2)=\sqrt{3}-2$. 故选 B.

7.【解】(1) 原式 $=5-2-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-3$

$=-\sqrt{6}$.

(2) 原式 $=5-2\sqrt{5}+1-(18-12)$

$=6-2\sqrt{5}-6$

$=-2\sqrt{5}$.

8.【解】(1) ∵ $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{2}+1$,

∴ $ab=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1$, $a+b=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$,

∴ $a^2b+ab^2=ab(a+b)=1\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

(2) 由 (1) 可知 $ab=1$, $a+b=2\sqrt{2}$,

∴ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2}{ab}+\frac{a^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{(2\sqrt{2})^2-2\times1}{1}=8-2=6$.

刷易错

9. (1) ③

(2)【解】原式 $=2\sqrt{6\times3}-\sqrt{\frac{24}{3}}=2\sqrt{18}-\sqrt{8}=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

> **易错警示** 在进行二次根式的加减运算时, 必须将二次根式化成最简二次根式. 若被开方数相同, 就合并; 若被开方数不相同, 则不能合并.

刷提升

1. B　【解析】∵ $3<\sqrt{13}<4$, ∴ $2<6-\sqrt{13}<3$, ∴ $6-\sqrt{13}$ 的整数部分 $x=2$, 则小数部分 $y=6-\sqrt{13}-2=4-\sqrt{13}$, 则 $(2x+\sqrt{13})y=(4+\sqrt{13})\times(4-\sqrt{13})=16-13=3$. 故选 B.

2. $a>b>c$　【解析】$\because a=\sqrt{6}-\sqrt{2}, b=\sqrt{3}-1, c=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\therefore a=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $c=\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. $\because 4=\sqrt{16}>2\sqrt{2}=\sqrt{8}>2=\sqrt{4}$, $\therefore a>b>c$. 故答案为 $a>b>c$.

关键点拨 先将 a,b,c 化成分母均为 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 的分数，再比较分子的大小即可.

3. $8+5\sqrt{2}$　【解析】当 $n=\sqrt{2}$ 时，$n(n+1)=\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$，且 $2+\sqrt{2}<12$，$\therefore$ 将 $n=2+\sqrt{2}$ 再次输入，$n(n+1)=(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}+1)=(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=6+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2=8+5\sqrt{2}$. $\because 8+5\sqrt{2}>12$，$\therefore$ 输出的结果是 $8+5\sqrt{2}$.

4. 4　【解析】$\because a+3\sqrt{b}=8, b+3\sqrt{a}=8$，$\therefore a-b+3\sqrt{b}-3\sqrt{a}=0$，$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})-3(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0$. $\because a\neq b$，$\therefore \sqrt{a}\neq\sqrt{b}$，$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}=3$. $\because a+b+3(\sqrt{a}+\sqrt{b})=16$，$\therefore a+b=7$，$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}=7$，$\therefore \sqrt{ab}=1$，$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}=3+1=4$. 故答案为 4.

5.【解】(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{121}+\sqrt{119}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)+\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+\dfrac{1}{2}(\sqrt{121}-\sqrt{119})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{121}-1)=\dfrac{1}{2}(11-1)=5$.

(2) ①$\because a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$，

$\therefore a-1=\sqrt{2}$，$\therefore (a-1)^2=2$，即 $a^2-2a=1$，

$\therefore 4a^2-8a+1=4(a^2-2a)+1=4\times1+1=5$.

②由①得 $a^2-2a=1$，$\therefore a^3-3a^2+a+1=a(a^2-2a)-a^2+a+1=a-a^2+a+1=-a^2+2a+1=-(a^2-2a)+1=-1+1=0$，故答案为 0.

关键点拨 (2)②将所求式子变形，然后利用 $a^2-2a=1$ 整体代入即可求解.

刷素养

6.【解】(1) 由已知条件可知 $OA_n^2=n, S_n=\dfrac{\sqrt{n}}{2}$. 故答案为 $n,\dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

(2) 原式 $=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{4}}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\frac{\sqrt{99}}{2}+\frac{\sqrt{100}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{2}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=2\times\left[\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+\cdots+\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}\right]=2\times(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99})=2\times(\sqrt{100}-1)=18$.

(3) 线段 $OA_1, OA_2, OA_3, \cdots, OA_{2\,022}$ 的长分别是 $\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\cdots,\sqrt{2\,022}$. 设其中最大的正整数为 a，则这些正整数分别是 $1,2,3,4,5,\cdots,a$. $\because 44^2=1\,936, 45^2=2\,025$，$\therefore a=44$，$\therefore$ 线段 $OA_1,OA_2,OA_3,\cdots,OA_{2\,022}$ 中，长度为正整数的线段共有 44 条. 故答案为 44.

思路分析 (3) 由题意知线段 $OA_1, OA_2, OA_3, \cdots, OA_{2\,022}$ 的长分别是 $\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\cdots,\sqrt{2\,022}$. 设其中最大的正整数为 a. $\because 44^2=1\,936, 45^2=2\,025$，$\therefore a=44$，进而可得答案.

大招专题 3　二次根式比较大小的方法

刷难关

大招解读 | 平方法

先将两个要比较的数分别平方，再根据"$a>0,b>0$ 时，可由 $a^2>b^2$ 得到 $a>b$；$a<0,b<0$ 时，可由 $a^2>b^2$ 得到 $a<b$"来比较大小.

对于 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{c}\pm\sqrt{d}$，若 $a+b=c+d$，也可用此法.

1. D　【解析】因为 $(\sqrt{2})^2=2, 2^2=4$，所以 $\sqrt{2}<2$，故选项 A 错误，不符合题意；因为 $(2\sqrt{3})^2=12, (3\sqrt{2})^2=18$，所以 $(2\sqrt{3})^2<(3\sqrt{2})^2$，所以 $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$，故选项 B 错误，不符合题意；因为 $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\dfrac{7}{4}, \left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$，所以 $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2<\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，所以 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}<\dfrac{3}{2}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}>-\dfrac{3}{2}$，故选项 C 错误，不符合题意；因为 $8^2=64, (\sqrt{67})^2=67$，所以 $8^2<(\sqrt{67})^2$，所以 $8<\sqrt{67}$，故选项 D 正确，符合题意. 故选 D.

2.【解】因为 $(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2=20+2\sqrt{91}$，$(\sqrt{17}+\sqrt{3})^2=20+2\sqrt{51}$，且 $\sqrt{13}+\sqrt{7}>0$，$\sqrt{17}+\sqrt{3}>0$，$20+2\sqrt{91}>20+2\sqrt{51}$，所以 $\sqrt{13}+\sqrt{7}>\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

大招解读｜作差/作商法

作差法	作商法
设 a,b 为任意两个实数，先求出 a 与 b 的差，比较两数的差与 0 的大小来确定 a 与 b 的大小. ①$a-b>0$，则 $a>b$； ②$a-b=0$，则 $a=b$； ③$a-b<0$，则 $a<b$	设 a,b 为任意两个不为 0 的同号实数，先求出 a 与 b 的商，比较两数的商与 1 的大小来确定 a 与 b 的大小. ①$a\div b>1$，当 a,b 为正数时 $a>b$；当 a,b 为负数时 $a<b$. ②$a\div b=1$，$a=b$. ③$a\div b<1$，当 a,b 为正数时 $a<b$；当 a,b 为负数时 $a>b$

3.【解】$\dfrac{\frac{\sqrt7}{\sqrt5}}{\frac{\sqrt5}{2}}=\dfrac{2\sqrt7}{5}=\dfrac{\sqrt{28}}{5}>1$，所以$\dfrac{\sqrt7}{\sqrt5}>\dfrac{\sqrt5}{2}$.

4.【解】因为$\dfrac{\sqrt6-\sqrt5}{\sqrt3}-\dfrac{2-\sqrt2}{\sqrt2}=\dfrac{(\sqrt6-\sqrt5)\sqrt2-(2-\sqrt2)\sqrt3}{\sqrt6}=\dfrac{2\sqrt3-\sqrt{10}-2\sqrt3+\sqrt6}{\sqrt6}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt{10}}{\sqrt6}<0$，所以$\dfrac{\sqrt6-\sqrt5}{\sqrt3}<\dfrac{2-\sqrt2}{\sqrt2}$.

另解 $\dfrac{\sqrt6-\sqrt5}{\sqrt3}\div\dfrac{2-\sqrt2}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt6-\sqrt5}{\sqrt3}\times\dfrac{\sqrt2}{2-\sqrt2}=\dfrac{2\sqrt3-\sqrt{10}}{2\sqrt3-\sqrt6}<1$，所以$\dfrac{\sqrt6-\sqrt5}{\sqrt3}<\dfrac{2-\sqrt2}{\sqrt2}$.

大招解读｜取近似值后比较

牢记常见无理数的近似值：

$\sqrt2\approx1.414$；$\sqrt3\approx1.732$；$\sqrt5\approx2.236$；$\sqrt6\approx2.449$；$\sqrt7\approx2.646$.

5. $>$ 【解析】$\sqrt5-1\approx2.236-1>1$，所以$\dfrac{\sqrt5-1}{2}>\dfrac{1}{2}$，故答案为>.

大招解读｜取中间值比较

通过两式与中间量的比较来确定原式的大小，借助中间量巧妙转换达到化难为简的目的.

6.【解】因为 $6<\sqrt{37}<7$，所以 $\sqrt{37}-2>4$. 又因为 $1<\sqrt3<2$，所以$\sqrt3+2<4$，所以 $\sqrt{37}-2>\sqrt3+2$.

7.【解】$\sqrt{623}-1<\sqrt{625}-1=25-1=24$，

$\sqrt{531}+1>\sqrt{529}+1=23+1=24$，

所以$\sqrt{623}-1<\sqrt{531}+1$.

大招解读｜分子/分母有理化

各自先将分子/分母有理化，再进行比较.

8.【解】$\dfrac{1+\sqrt2}{3+\sqrt2}=\dfrac{(1+\sqrt2)(3-\sqrt2)}{(3+\sqrt2)(3-\sqrt2)}=\dfrac{2\sqrt2+1}{7}$，$\dfrac{2+\sqrt2}{\sqrt2+1}=\dfrac{(2+\sqrt2)(\sqrt2-1)}{(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)}=\sqrt2=\dfrac{7\sqrt2}{7}$. 因为 $\dfrac{2\sqrt2+1}{7}<\dfrac{7\sqrt2}{7}$，所以$\dfrac{1+\sqrt2}{3+\sqrt2}<\dfrac{2+\sqrt2}{\sqrt2+1}$.

关键点拨 分子、分母同乘一个式子，将分子有理化为 1 是解题关键.

9.【解】因为 $\dfrac{2\sqrt3-\sqrt{11}}{3\sqrt2}=\dfrac{1}{3\sqrt2(2\sqrt3+\sqrt{11})}=\dfrac{1}{6\sqrt6+3\sqrt{22}}=\dfrac{1}{6\sqrt6+\sqrt{198}}$，$\dfrac{3\sqrt2-\sqrt{17}}{2\sqrt3}=\dfrac{1}{2\sqrt3(3\sqrt2+\sqrt{17})}=\dfrac{1}{6\sqrt6+2\sqrt{51}}=\dfrac{1}{6\sqrt6+\sqrt{204}}$，$\dfrac{1}{6\sqrt6+\sqrt{198}}>\dfrac{1}{6\sqrt6+\sqrt{204}}$，所以 $\dfrac{2\sqrt3-\sqrt{11}}{3\sqrt2}>\dfrac{3\sqrt2-\sqrt{17}}{2\sqrt3}$.

大招解读｜取倒数法

设 a,b 为两个大于 0 的实数，先分别求出 a 与 b 的倒数，再根据"当 $\dfrac1a<\dfrac1b$ 时，$a>b$；当 $\dfrac1a=\dfrac1b$ 时，$a=b$；当 $\dfrac1a>\dfrac1b$ 时，$a<b$"来比较 a 与 b 的大小.

10.【解】因为$\dfrac{1}{\sqrt{2\,009}-\sqrt{2\,008}}=\sqrt{2\,009}+\sqrt{2\,008}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2\,008}-\sqrt{2\,007}}=\sqrt{2\,008}+\sqrt{2\,007}$，$\sqrt{2\,009}+\sqrt{2\,008}>\sqrt{2\,008}+\sqrt{2\,007}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{2\,009}-\sqrt{2\,008}}>\dfrac{1}{\sqrt{2\,008}-\sqrt{2\,007}}$，所以 $\sqrt{2\,009}-\sqrt{2\,008}<\sqrt{2\,008}-\sqrt{2\,007}$.

大招专题 4　二次根式的化简求值

刷难关

大招解读｜运用二次根式的非负性求值

因为二次根式$\sqrt a(a\geqslant0)$表示 a 的算术平方根，所以$\sqrt a\geqslant0$，在解题时可以利用此性质进行化简达到求值的目的.

1.【解】(1)由题意，得 $x^2-4\geqslant0$，$4-x^2\geqslant0$，且 $x-2\neq0$，解得 $x=-2$，所以 $y=-4$，所以 $xy=8$，所以 xy 的平方根是$\pm2\sqrt2$.

(2)$2a^2-4a+4=2-5\sqrt{b-3}$，$2(a-1)^2+2=2-5\sqrt{b-3}$，即 $2(a-1)^2+5\sqrt{b-3}=0$，所以 $a-1=0$，$b-3=0$，所以 $a=1$，$b=3$. 当 $a=1$ 为腰长时，三边长分别为 1，1，3，不符合三角形三边关系，舍去；当 $b=3$ 为腰长时，三边长分别为 3，3，1，符合三角形三边关系，所以$\triangle ABC$ 的周长为 $3+3+1=7$.

关键点拨 (2)注意题目中没有说明等腰三角形的哪条边是腰时，要进行分类讨论.

大招解读｜运用数形结合法化简

先根据字母表示的点在数轴上的位置确定该字母的值或取值范围，再进行化简.

2.【解】由数轴知 $-1<x<2$，所以 $|x-2|-\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{4x^2-20x+25}=2-x-(3-x)+|2x-5|=2-x-3+x-2x+5=4-2x$.

大招解读｜巧用乘法公式化简求值
在化简二次根式时，有符合完全平方公式或平方差公式的形式的式子，可利用完全平方公式或平方差公式进行变形.

3.【解】因为 $x^2-xy+y^2=x^2+2xy+y^2-3xy=(x+y)^2-3xy$，所以当 $x=\sqrt{6}+2$，$y=\sqrt{6}-2$ 时，原式 $=(\sqrt{6}+2+\sqrt{6}-2)^2-3\times(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)=18$.

4. $\underline{-4\sqrt{6}}$　【解析】因为 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}-\sqrt{3}$，所以 $a+b=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$，$a-b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，$ab=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-1$，所以 $a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)=ab(a-b)(a+b)=-1\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=-4\sqrt{6}$. 故答案为 $-4\sqrt{6}$.

大招解读｜巧用分母有理化化简求值
当二次根式出现在分母中时，可通过分母有理化的方法进行化简：
1. 若分母是单项二次根式，可利用 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ 来进行分母有理化；
2. 若分母是非单项二次根式，则可以利用平方差公式来进行分母有理化.

5. $\underline{2\sqrt{5}}$　【解析】因为 $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}-2$，所以 $a+b=(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)=2\sqrt{5}$，$ab=(\sqrt{5}+2)\times(\sqrt{5}-2)=5-4=1$，所以 $\sqrt{a^2+b^2+2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab+2}=\sqrt{20-2+2}=2\sqrt{5}$.

6.【解】(1)因为 $m=\dfrac{2}{\sqrt{11}+3}=\dfrac{2(\sqrt{11}-3)}{(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)}=\sqrt{11}-3$，所以 $m+3=\sqrt{11}$，所以 $(m+3)^2=11$，即 $m^2+6m+9=11$，所以 $m^2+6m=2$.

(2)因为 $n=\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}=\sqrt{17}+4$，所以 $n-4=\sqrt{17}$，所以 $(n-4)^2=17$，即 $n^2-8n+16=17$，所以 $n^2-8n=1$，所以 $2n^2-16n+9=2(n^2-8n)+9=2\times1+9=11$.

大招解读｜巧用整体代换化简求值
当问题的结构比较复杂，难以直接发现化简规律时，可以把其中某些部分看成一个整体，将整体代入到式子中进行化简，能使复杂的问题简单化.

7.【解】(1)因为 $x=\sqrt{10}-3$，所以 $x+3=\sqrt{10}$，所以 $(x+3)^2=10$，即 $x^2+6x+9=10$，所以 $x^2+6x=1$，所以 $x^2+6x-8=1-8=-7$.

刷有所得 利用整体代入的方法可简化计算.

(2)因为 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $2x=\sqrt{5}-1$，所以 $2x+1=\sqrt{5}$，所以 $(2x+1)^2=5$，所以 $4x^2+4x+1=5$，所以 $4x^2+4x=4$，所以 $x^2+x=1$，所以 $x^3+2x^2=x^3+x^2+x^2=x(x^2+x)+x^2=x\times1+x^2=x+x^2=1$.

全章综合训练

刷中考

1. $\underline{\text{D}}$　【解析】根据题意，得 $x+1\geqslant0$，解得 $x\geqslant-1$. 故选 D.

关键点拨 掌握二次根式有意义的条件及分式有意义的条件是解题的关键.

2. $\underline{m\geqslant1}$　【解析】根据二次根式有意义的条件及分式有意义的条件，得 $\begin{cases}m-1\geqslant0,\\m+2\neq0,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant1$，$\therefore$ m 的取值范围是 $m\geqslant1$，故答案为 $m\geqslant1$.

3. $\underline{3}$　【解析】$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$. 故答案为 3.

4. $\underline{2\sqrt{3}}$　【解析】$\sqrt{12}=\sqrt{3\times4}=2\sqrt{3}$，故答案为 $2\sqrt{3}$.

5. $\underline{\text{B}}$　【解析】原式 $=\sqrt{36}=6$，故选 B.

6. $\underline{\text{B}}$　【解析】$(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{10}-\sqrt{6})=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2=10-6=4$. 故选 B.

7. $\underline{\text{B}}$　【解析】

A	$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不能合并	不合题意
B	$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$，正确	符合题意
C	$2\div\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq1$	不合题意
D	$\because\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$，$\therefore\sqrt{(-5)^2}=5$	不合题意

故选 B.

8. $\underline{0}$　【解析】$\sqrt{18}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0$，故答案为 0.

9. $\underline{3\sqrt{3}}$　【解析】$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，故答案为 $3\sqrt{3}$.

10. $\underline{4}$　【解析】$\because 3\sqrt{2}=\sqrt{18}$，$4<\sqrt{18}<5$，$\therefore 4<3\sqrt{2}<5$，$\therefore$ 实数 $3\sqrt{2}$ 的整数部分为 4，故答案为 4.

11. $\underline{1-2\sqrt{2}}$　【解析】原式 $=2-2\sqrt{2}-1=1-2\sqrt{2}$，故答案为 $1-2\sqrt{2}$.

12.【解】(1)原式 $=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

(2)原式 $=6-\sqrt{16}+4=6-4+4=6$.

(3)原式 $=\sqrt{36}+2-1=6+2-1=7$.

13.【解】原式 $=\frac{2m(m+2)}{m-2}\cdot\frac{(m-2)^2}{m}=2(m+2)(m-2)$，当 $m=\sqrt{3}-1$ 时，原式 $=2(\sqrt{3}-1+2)(\sqrt{3}-1-2)=2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-3)=2(3-3\sqrt{3}+\sqrt{3}-3)=-4\sqrt{3}$.

刷章测

1. D 【解析】

A	被开方数是分数，故不是最简二次根式，不符合题意
B	被开方数是小数，故不是最简二次根式，不符合题意
C	$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故 $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式，不符合题意
D	$\sqrt{15}$ 是最简二次根式，符合题意

2. B 【解析】∵ 当 $x=3$ 时，$\sqrt{2x-a}$ 无意义，∴ $2\times3-a<0$，解得 $a>6$. ∵ 当 $x=5$ 时，$\sqrt{2x-a}$ 是二次根式，∴ $2\times5-a\geqslant0$，解得 $a\leqslant10$，∴ $6<a\leqslant10$，∴ a 的值可能是 8. 故选 B.

3. C 【解析】$\sqrt{3a}$ 与 $\sqrt{6a}$ 不能合并，故选项 A 不符合题意；$6\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{6a}$ 不能合并，故选项 B 不符合题意；$\sqrt{24a}=2\sqrt{6a}$，则 $\sqrt{24a}$ 与 $\sqrt{6a}$ 能合并，故选项 C 符合题意；$\sqrt{6}a$ 与 $\sqrt{6a}$ 不能合并，故选项 D 不符合题意. 故选 C.

4. C 【解析】原式 $=4+2\sqrt{5}$. ∵ $4<2\sqrt{5}<5$，∴ $8<4+2\sqrt{5}<9$，即 $8<\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{20}<9$. 故选 C.

5. A 【解析】由数轴可知 $b<-a<0<a<-b$，∴ $b-a<0$，$a+b<0$，∴ 原式 $=-(b-a)-(a+b)=-b+a-a-b=-2b$. 故选 A.

6. C 【解析】由题可得 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$，$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $S_{2\,024}=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2\,023}-\frac{1}{2\,024}\right)+\left(1+\frac{1}{2\,024}-\frac{1}{2\,025}\right)=2\,024+1-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,025^2-1}{2\,025}=\frac{2\,024\times2\,026}{2\,025}$，所以 $\frac{S_{2\,024}}{2\,026}=\frac{2\,024}{2\,025}$，故选 C.

思路分析 先根据每个式子的规律得出 $S_{2\,024}$ 的式子，再计算即可.

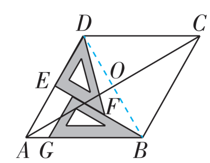
7. $3+\sqrt{2}$ 【解析】由题意得 $6-(3-\sqrt{2})=3+\sqrt{2}$，则 $3-\sqrt{2}$ 与 $3+\sqrt{2}$ 是关于 6 的“如意数”. 故答案为 $3+\sqrt{2}$.

8. $m-1$ 【解析】由题意可知 $ab=1$，∴ $(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})=1$，∴ $m-n=1$，∴ $n=m-1$，故答案为 $m-1$.

9. 62 【解析】根据题意可知，阴影部分的两个长方形全等. 设阴影部分的长方形的长为 a，宽为 b. 由题意得 $\begin{cases}4a+4b=8\sqrt{2}+12\sqrt{6},\\2ab=24\sqrt{3},\end{cases}$ ∴ $a+b=2\sqrt{2}+3\sqrt{6}$，$ab=12\sqrt{3}$，∴ $S_1+S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(2\sqrt{2}+3\sqrt{6})^2-24\sqrt{3}=62$.

思路分析 由 DF 的长可求得 DE 的长，然后利用等边三角形的性质、菱形的性质以及勾股定理求解即可.

10. $4\sqrt{6}$ 【解析】如图，连接 BD 与 AC 交于点 O. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=AD$，$AC=2OA$，$AC\perp BD$，$OB=\frac{1}{2}BD$. ∵ E 为 AD 的中点，∴ $AD=2DE$. 由题意得 $\angle DEF=90^\circ$，$DE=EF$，∴ $DE^2+EF^2=2DE^2=DF^2$，∴ $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}DF=2\sqrt{2}$. 根据题意易知两个三角板不重合的两条直角边互相平行，则 $\angle DAB=60^\circ$，∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形，∴ $AB=AD=BD=2DE=4\sqrt{2}$，∴ $OB=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{2}$，∴ $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2\sqrt{6}$，∴ $AC=2OA=4\sqrt{6}$，故答案为 $4\sqrt{6}$.



11. -2 【解析】∵ $\sqrt{19-x^2}+\sqrt{15+x^2}=8$，∴ $(\sqrt{19-x^2}+\sqrt{15+x^2})^2=19-x^2+15+x^2+2\sqrt{19-x^2}\cdot\sqrt{15+x^2}=34+2\sqrt{19-x^2}\cdot\sqrt{15+x^2}=64$，∴ $2\sqrt{19-x^2}\cdot\sqrt{15+x^2}=30$，∴ $(\sqrt{19-x^2}-\sqrt{15+x^2})^2=(\sqrt{19-x^2})^2+(\sqrt{15+x^2})^2-2\sqrt{19-x^2}\cdot\sqrt{15+x^2}=19-x^2+15+x^2-30=34-30=4$，∴ $\sqrt{19-x^2}-\sqrt{15+x^2}=\pm2$. 当 $\sqrt{19-x^2}-\sqrt{15+x^2}=2$ 时，易得 $19-x^2=25$，∴ $x^2=-6$，舍去；当 $\sqrt{19-x^2}-\sqrt{15+x^2}=-2$ 时，易得 $19-x^2=9$，∴ $x^2=10$，符合. 故答案为 -2.

12.【解】(1) $(\sqrt{8}+2\sqrt{3})\times\sqrt{6}=\sqrt{48}+2\sqrt{18}=4\sqrt{3}+6\sqrt{2}$.

(2) $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{27}\right)-\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\right.$